

الفندق ستة

## الوحدة الرابعة

✓ متوسطات امثلث ( نظريات - نتائج )

✓ امثلث امثساوي الساقين

✓ خواص امثلث امثساوي الساقين

✓ نظريات امثلث امثساوي الساقين



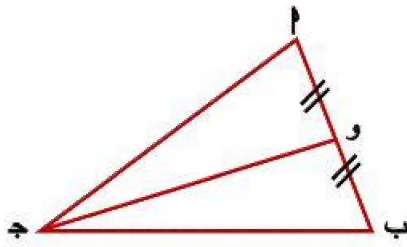
## متوسطات المثلث



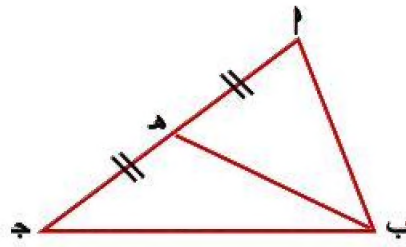
## تعريف

متوسط المثلث هو القطعة المستقيمة الواصلة بين أي رأس من رؤوس المثلث إلى منتصف الضلع المقابل لهذه الرأس

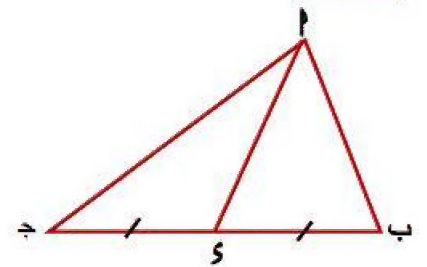
فمثلا :



إذا كان  $D$  منتصف  $BC$  و  
فإن :  $AD$  يسمى متوسط



إذا كان  $E$  منتصف  $AC$  و  
فإن :  $BE$  يسمى متوسط

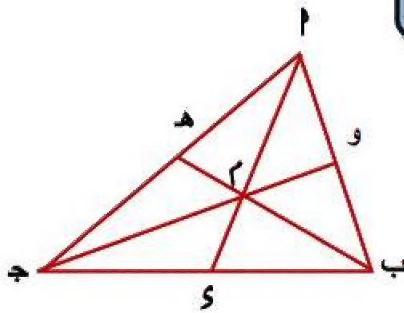


إذا كان  $F$  منتصف  $AB$  و  
فإن :  $CF$  يسمى متوسط

∴ أي مثلث له ثلاثة متوسطات

## نظرية (١)

متوسطات المثلث تتقاطع جميعا في نقطة واحدة

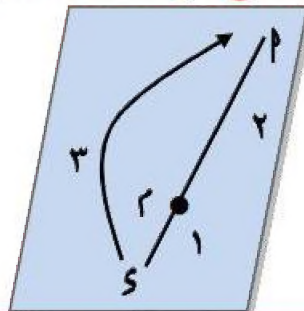
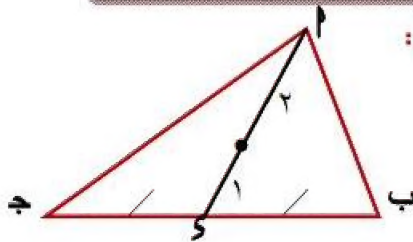


في  $\triangle ABC$  إذا كانت  $D$  منتصف  $BC$ ،  $E$  منتصف  $AC$ ، و  $F$  منتصف  $AB$   
فإن :  $AD$ ،  $BE$ ،  $CF$  تتقاطع في نقطة واحدة .  
أي أن :  $AD \cap BE \cap CF = \{G\}$

## نظرية (٢)

نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كلا منها بنسبة ٢ : ١ من جهة القاعدة

إذا كان  $G$  منتصف  $AD$  في  $\triangle ABC$ ،  $F$  نقطة تقاطع متوسطات المثلث فإن :



$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad AG = \frac{2}{3} AD & \quad \text{أو} \quad AG = \frac{2}{3} \times 3 = 2 \\ \textcircled{2} \quad BG = \frac{2}{3} BE & \quad \text{أو} \quad BG = \frac{2}{3} \times 3 = 2 \\ \textcircled{3} \quad CG = \frac{2}{3} CF & \quad \text{أو} \quad CG = \frac{2}{3} \times 3 = 2 \end{aligned}$$

أي أن : إذا كان  $G$  منتصف  $AD$  طول  $AG = 2$ ،  $GD = 1$ ،  $AG = 2$ ،  $GD = 1$ ،  $AG = 2$ ،  $GD = 1$ ،  $AG = 2$ ،  $GD = 1$



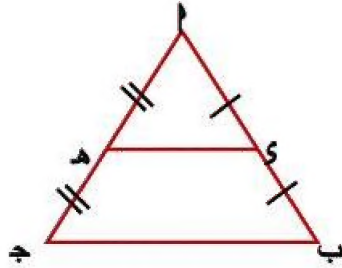
ملاحظه هامة :-

نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كلا منها بنسبة ٢ : ١ من جهة الرأس .

حقيقة :-

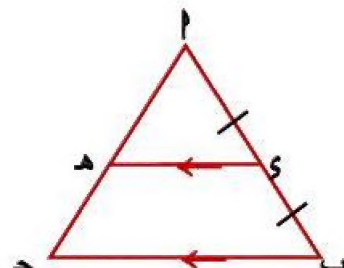
النقطة التي تقسم متوسط المثلث بنسبة ٢ : ١ من جهة القاعدة هي نقطة تقاطع متوسطات المثلث .

تذكر أن



إذا كان  $E$  ،  $D$  منتصف  $AB$  ،  $C$  ،

فإن :  $DE \parallel BC$  ،  $DE = \frac{1}{2} BC$

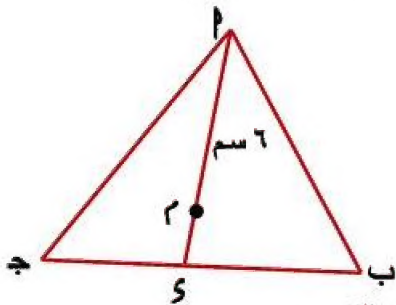


إذا كان  $E$  منتصف  $AB$  ،

$DE \parallel BC$  ، فإن :  $D$  منتصف  $AC$  ،

تمارين متنوعة

(١) أكمل بإيجاد الأطوال المطلوبة ، حيث  $P$  نقطة تقاطع متوسطات المثلث :



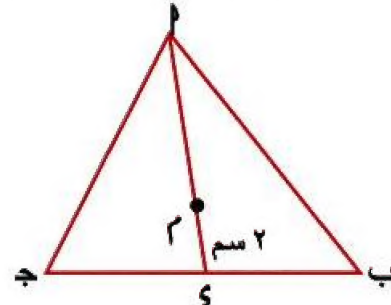
$AP = ٦$  سم

$BP = ٤$  سم

الحل

$$AP = \frac{2}{3} BP = \frac{2}{3} \times ٤ = \frac{8}{3} \text{ سم}$$

$$BP = \frac{3}{2} AP = \frac{3}{2} \times \frac{8}{3} = ٤ \text{ سم}$$



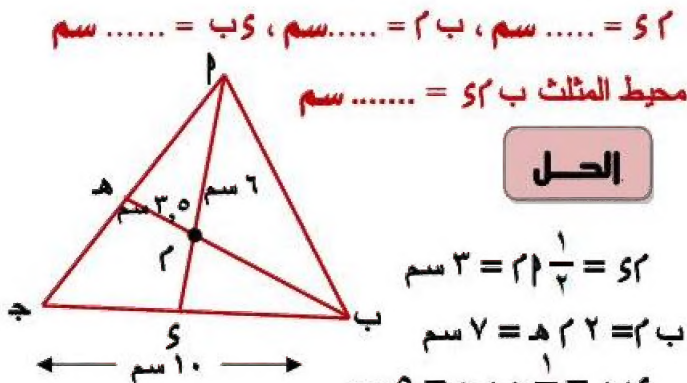
$AP = ٦$  سم

$BP = ٤$  سم

الحل

$$AP = \frac{2}{3} BP = \frac{2}{3} \times ٤ = \frac{8}{3} \text{ سم}$$

$$BP = \frac{3}{2} AP = \frac{3}{2} \times \frac{8}{3} = ٤ \text{ سم}$$



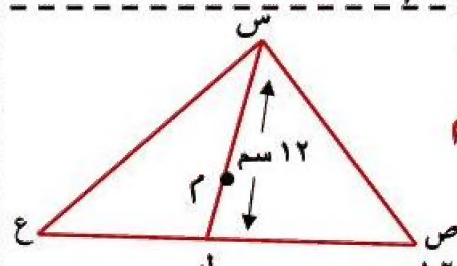
الحل

$$AP = \frac{2}{3} BP = \frac{2}{3} \times ٤ = \frac{8}{3} \text{ سم}$$

$$BP = \frac{3}{2} AP = \frac{3}{2} \times \frac{8}{3} = ٤ \text{ سم}$$

$$CP = \frac{3}{2} AP = \frac{3}{2} \times \frac{8}{3} = ٤ \text{ سم}$$

$$\text{محيط } \triangle ABC = ٦ + ٤ + ٤ = ١٤ \text{ سم}$$



الحل

$$AP = \frac{2}{3} BP = \frac{2}{3} \times ٤ = \frac{8}{3} \text{ سم}$$

$$BP = \frac{3}{2} AP = \frac{3}{2} \times \frac{8}{3} = ٤ \text{ سم}$$

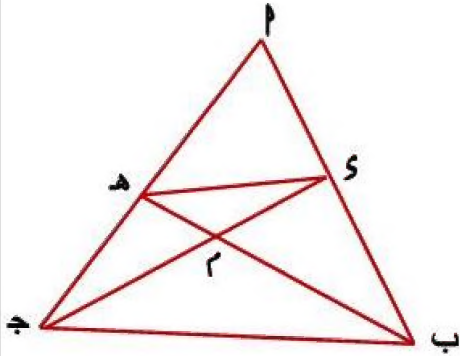
$$CP = \frac{3}{2} AP = \frac{3}{2} \times \frac{8}{3} = ٤ \text{ سم}$$



## (٢) في الشكل المقابل :-

س ، ه منتصفا ب ا ، ا ج ، ب ٢ = ٦ سم ، ب ج = ١٠ سم  
 س ج = ١٢ سم. اوجد محيط  $\Delta$  س ه ٢ ؟

## الحل



$$\therefore \text{ه منتصف ا ب} \quad \therefore \text{س ج متوسط} \quad \therefore \text{س ج} = 12 \times \frac{1}{3} = 4 \quad \therefore \text{س ج} = 4$$

$$\therefore \text{ا منتصف ب ج} \quad \therefore \text{ه ٢ متوسط} \quad \therefore \text{ه ٢} = 6 \times \frac{1}{3} = 2 \quad \therefore \text{ه ٢} = 2$$

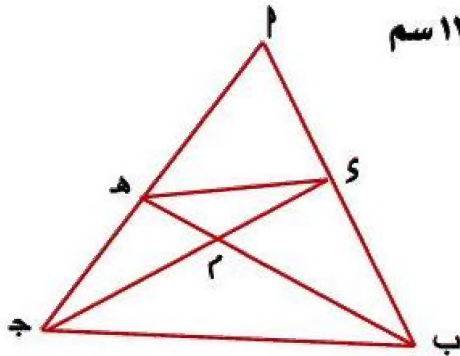
$$\therefore \text{ب منتصف ا ج} \quad \therefore \text{س ٢ متوسط} \quad \therefore \text{س ٢} = 10 \times \frac{1}{3} = \frac{10}{3} \quad \therefore \text{س ٢} = \frac{10}{3}$$

$$\therefore \text{محيط } \Delta \text{ س ه ٢} = 4 + 2 + \frac{10}{3} = \frac{20}{3} \text{ سم}$$

## (٣) في الشكل المقابل :-

س ، ه منتصفا ا ب ، ا ج ، س ج = ٦ سم ، ب ه = ٩ سم  
 س ه = ٥ سم. اوجد محيط  $\Delta$  ب ا ج ؟

## الحل



$$\therefore \text{ه منتصف ا ب} \quad \therefore \text{س ج متوسط} \quad \therefore \text{س ج} = 6 \times \frac{2}{3} = 4 \quad \therefore \text{س ج} = 4$$

$$\therefore \text{ا منتصف ب ج} \quad \therefore \text{ه ٢ متوسط} \quad \therefore \text{ه ٢} = 9 \times \frac{2}{3} = 6 \quad \therefore \text{ه ٢} = 6$$

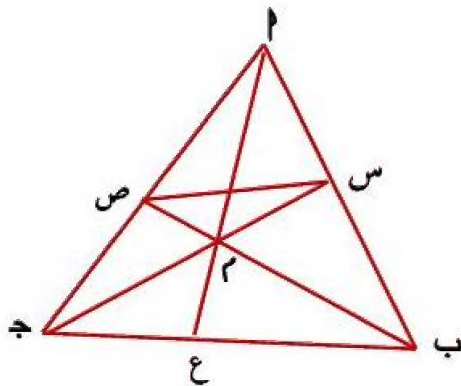
$$\therefore \text{ب منتصف ا ج} \quad \therefore \text{س ٢ متوسط} \quad \therefore \text{س ٢} = 5 \times 2 = 10 \quad \therefore \text{س ٢} = 10$$

$$\therefore \text{محيط } \Delta \text{ ب ا ج} = 4 + 6 + 10 = 20 \text{ سم}$$

## (٤) في الشكل المقابل :-

ا ب ج مثلث فيه س منتصف ا ب ، ص  $\in$  ا ج ، س ص // ب ج  
 ج س  $\cap$  ب ص = { ٢ } فإذا كان : ا م  $\cap$  ب ج = { ع }  
 اثبت أن : ب ع =  $\frac{1}{3}$  ب ج

## الحل



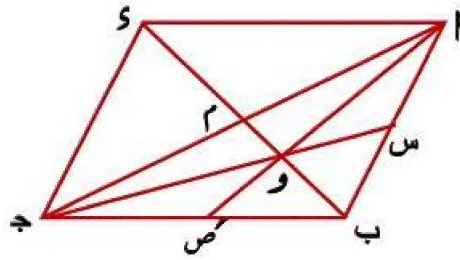
$$\text{س منتصف ا ب ، س ص // ب ج} \quad \therefore \text{ص منتصف ا ج}$$

$$\text{س منتصف ا ب} \quad \therefore \text{ج س متوسط} \quad \therefore \text{ص منتصف ا ج} \quad \therefore \text{ب ص متوسط}$$

$$\text{ا م } \cap \text{ ب ص} = \text{ج س} = \{ ٢ \}$$

$$\therefore \text{ب ع متوسط} \quad \therefore \text{ب ع} = \frac{1}{3} \text{ ب ج}$$

## (٥) في الشكل المقابل :-



١ ب ج د متوازي أضلاع ، ص منتصف ب ج

اثبت أن : س و =  $\frac{1}{4}$  و ج

## الحل

∴ ١ ب ج د متوازي أضلاع

∴ ١ ج ينصف ب د

∴ ٢ منتصف ١ ج ∴ ب ٢ متوسط

∴ ص منتصف ب ج ∴ ١ ص متوسط

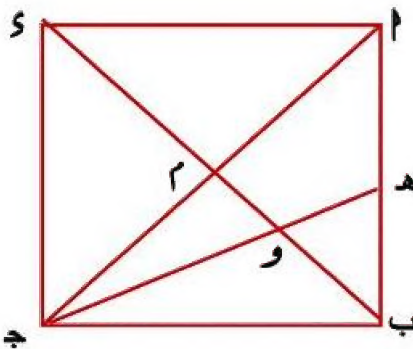
∴ ١ ص ∩ ب ٢ ∩ ج س = {و}

∴ ونقطتا تقاطع متوسطات المثلث ١ ب ج

∴ ١ ص متوسط

∴ س و =  $\frac{1}{4}$  و ج

## (٦) في الشكل المقابل :-



١ ب ج د مستطيل تقاطع قطراه في ٢ ، ه منتصف ١ ب

، ج ه ∩ ب د = {و} .

(١) إثبت أن : ونقطتا تقاطع متوسطات المثلث .

(٢) إذا كان ب و = ٤ سم أوجد طول ٢

## الحل

ه منتصف ١ ب ∴ ج ه متوسط في  $\Delta$  ١ ب ج

∴ ٢ منتصف ١ ج (القطران ينصف كلا منهما الآخر) ∴ ب ٢ متوسط

∴ ج ه ∩ ب ٢ = {و} ∴ ونقطتا تقاطع متوسطات المثلث ١ ب ج (المطلوب أولا)

∴ ب و = ٤ سم ∴ و ٢ = ٢ سم ∴ ب ٢ = ٦ سم

في المستطيل القطران متساويان وينصف كلا منهما الآخر

(المطلوب ثانيا)

∴ ٢ ب = ٢ ب = ٦ سم



## اجب بنفسك

(١) في الشكل المقابل :

أ ب ج مثلث ، م نقطة تقاطع متوسطات

فإذا كان : أ م = ٢ سم ، ب م = ٤ سم ، ج م = ٦ سم

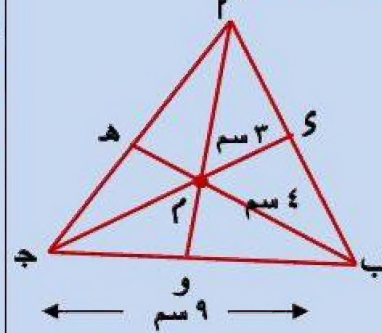
أ ب ج = ٩ سم

فأوجد :

① طول ب و

② طول أ ج

③ طول أ هـ



(٢) في الشكل المقابل :

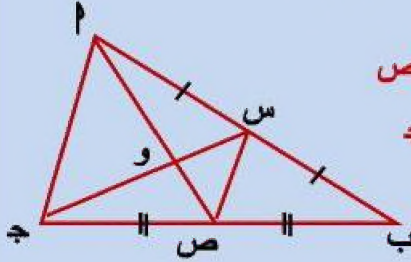
س ، ص منتصفا أ ب ، ب ج ، س ص = ٥ سم ،

ج د = ٢ سم ، ص د = ٨ سم ،

أوجد :

① محيط Δ أ س ص

② محيط Δ أ ج د



## نظرية (٣)

في المثلث القائم طول المتوسط الخارج من رأس القائمة يساوي نصف طول الوتر

المعطيات

المطلوب

العمل

البرهان

أ ب ج مثلث فيه و (أ ب ج) = ٩٠°

ب د متوسط في المثلث أ ب ج

إثبات أن : ب د = ½ أ ج

نرسم د ب ونأخذ هـ ⊂ د ب

بحيث د ب = د هـ

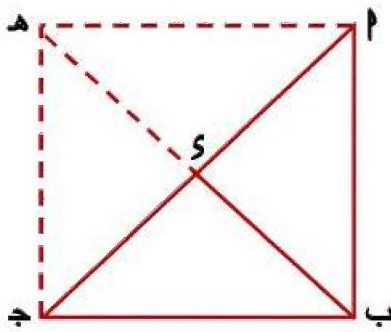
الشكل أ ب ج د هـ فيه أ ج ، ب هـ ينصف كل منهما الآخر

∴ الشكل أ ب ج د هـ متوازي أضلاع

و (أ ب ج) = ٩٠° ∴ الشكل أ ب ج د هـ مستطيل

∴ ب د = د هـ

∴ د ب = ½ أ ج



فمثلاً : في الشكل المقابل :-

إذا كان د منتصف أ ج

أ ج = ١٠ سم فإن : ب د = ٥ سم

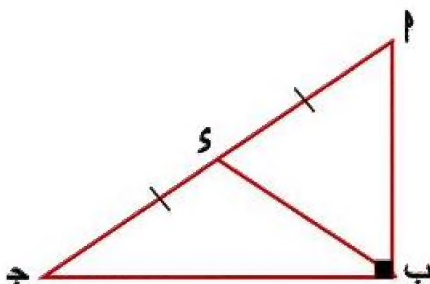
والعكس صحيح :-

إذا كان د منتصف أ ج وكان ب د = ٥ فإن أ ج = ١٠ سم

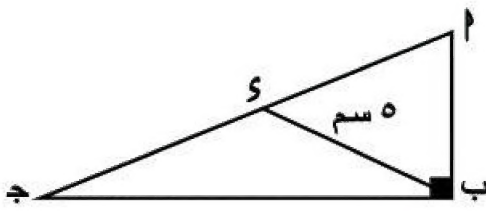
لاحظ أن : ب د = د أ = د ج وبالتالي فإن :-

① المثلث أ ب د يكون مثلث متساوي الساقين .

② المثلث د ب ج يكون مثلث متساوي الساقين .



تمارين متنوعة



أ ج = ..... سم

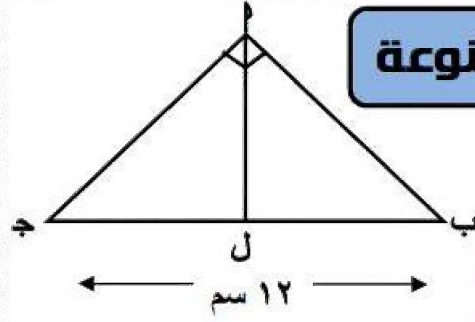
س ج = ..... سم

الحل

و (ب) =  $90^\circ$  ،  $\overline{SD}$  متوسط

أ ج = ٢ ب = ١٠ سم

س ج = ١ ج = ٥ سم



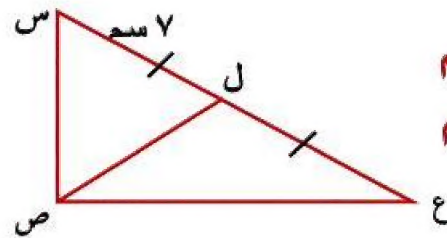
ص ل = ..... سم

س ل = ..... سم

الحل

ص ل =  $\frac{1}{2}$  س ع = ٦ سم

س ل =  $\frac{1}{2}$  س ع = ٦ سم



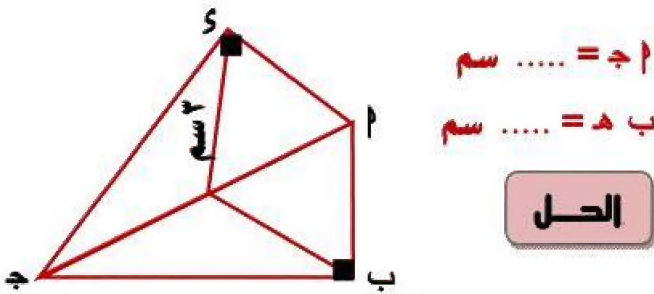
س ع = ..... سم

ل ص = ..... سم

الحل

س ع = ٢ س ل = ١٤ سم

ل ص =  $\frac{1}{2}$  س ع = ٧ سم



أ ج = ..... سم

ب ه = ..... سم

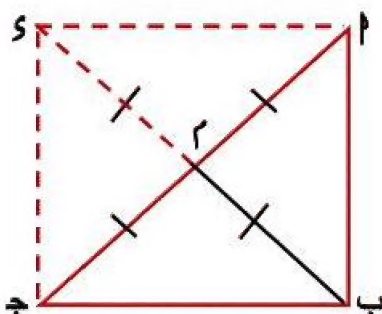
الحل

أ ج = ٢ س ه = ٦ سم

ب ه =  $\frac{1}{2}$  س ه = ٣ سم

عكس النظرية (٣)

إذا كان طول متوسط المثلث المرسوم من أحد رؤوسه يساوى نصف طول الضلع المقابل لهذا الرأس فإن زاوية هذا الرأس تكون قائمة.



أ ج مثلث فيه ،  $\overline{SD}$  متوسط ، ب ٢ =  $\frac{1}{2}$  س ج

إثبات أن : و (ب) =  $90^\circ$

نرسم  $\overline{SD}$  ونأخذ  $\overline{SD} \perp \overline{AB}$

ب حيث ب ٢ = ٢

ب ٢ =  $\frac{1}{2}$  س ج = ١ ج = ٧ سم

∴ ب ج = ١٤ سم

∴ الشكل أ ب ج فيه أ ج ، ب ٢ و قطران متساويان في الطول وينصف كلا منهما الآخر

∴ الشكل أ ب ج مستطيل

∴ و (ب) =  $90^\circ$

المعطيات

المطلوب

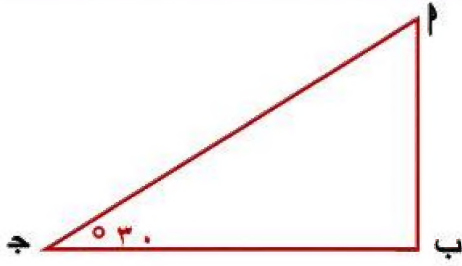
العمل

البرهان



## نتيجة

في المثلث القائم الزاوية طول الضلع المقابل للزاوية  $30^\circ$  يساوي نصف طول الوتر.



إذا كان المثلث ب م ج قائم الزاوية في ب

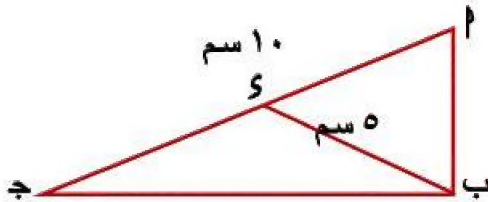
$$\text{و، } (\hat{ج}) = 30^\circ \text{ فإن : } م : ب = \frac{1}{2} \text{ م ج}$$

**فمثلاً :**

$$\text{إذا كان م ج = ٨ سم فإن : } م : ب = ٤ \text{ سم}$$

$$\text{إذا كان م ب = ٦ سم فإن : } م ج = ١٢ \text{ سم}$$

## تمارين متنوعة



## (١) في الشكل المقابل :-

س منتصف م ج ، م ج = ١٠ سم ، ب س = ٥ سم

أثبت أن : و،  $(\hat{م ب ج}) = 90^\circ$  ؟

## الحل

$\therefore$  ب س متوسط في  $\Delta م ب ج$

$$\therefore \text{ب س} = \frac{1}{2} \text{م ج} = ٥ \text{ سم} \quad \therefore \text{و، } (\hat{م ب ج}) = 90^\circ \text{ (نظرية)}$$

## (٢) في الشكل المقابل :-

س منتصف م هـ ، ص منتصف هـ ج ، س منتصف م ج

$$\text{، } ص س = ٤ \text{ سم ، ب س} = ٤ \text{ سم}$$

أثبت أن : و،  $(\hat{ب}) = 90^\circ$

## الحل

في  $\Delta م هـ ج$

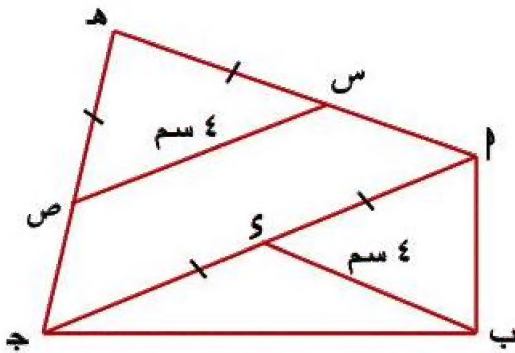
$\therefore$  س منتصف م هـ ، ص منتصف هـ ج

$$\therefore \text{ص س} = \frac{1}{2} \text{م ج} \quad \therefore \text{م ج} = ٨ \text{ سم}$$

في  $\Delta م ب ج$

$\therefore$  ب س متوسط ، ب س = ٤ سم ، م ج = ٨ سم

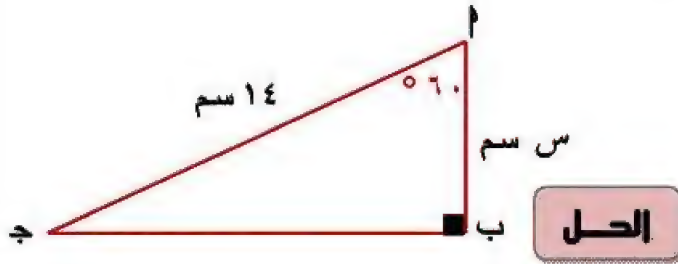
$$\therefore \text{ب س} = \frac{1}{2} \text{م ج} \quad \therefore \text{و، } (\hat{ب}) = 90^\circ$$







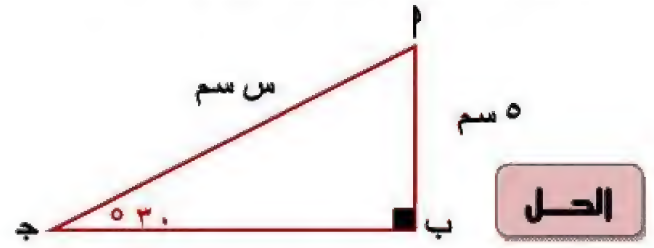
(٥) أوجد قيمة س في كل من الحالات الآتية :-



الحل

$$\begin{aligned} \therefore \angle P &= 60^\circ \\ \therefore \angle B &= 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ \\ \therefore \frac{1}{2} PB &= \frac{1}{2} \times 14 = 7 \text{ سم} \end{aligned}$$

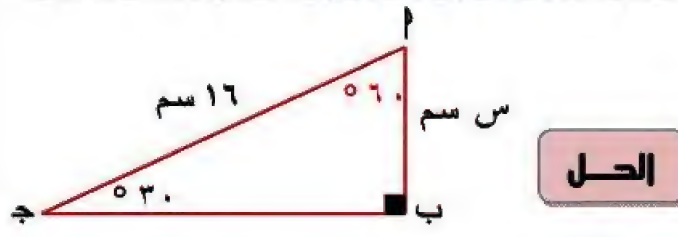
$$س = 7 \text{ سم}$$



الحل

$$\begin{aligned} \text{حيث } \angle B &= 30^\circ \\ \therefore \frac{1}{2} PB &= \frac{1}{2} \times 5 = 2.5 \text{ سم} \\ \therefore \frac{1}{2} s &= 2.5 \end{aligned}$$

$$س = 5 \text{ سم}$$



الحل

$$\begin{aligned} \therefore \angle B &= (90^\circ + 60^\circ) - 180^\circ = 30^\circ \\ \therefore \frac{1}{2} PB &= \frac{1}{2} \times 16 = 8 \text{ سم} \end{aligned}$$

$$س = 8 \text{ سم}$$

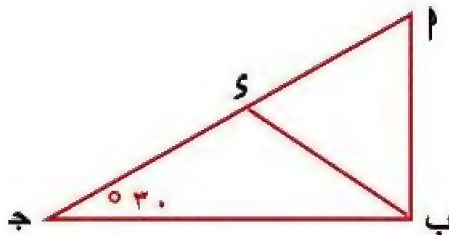


الحل

$$\begin{aligned} \therefore \frac{1}{2} PB &= \frac{1}{2} \times (s + 4) \\ \therefore \frac{1}{2} s &= \frac{1}{2} (s + 4) \end{aligned}$$

$$س = 4 \text{ سم}$$

(٦) في الشكل المقابل :-



$$\begin{aligned} \therefore \frac{1}{2} PB &= \frac{1}{2} \times 10 = 5 \text{ سم} \\ \therefore \frac{1}{2} PB &= \frac{1}{2} \times 9 = 4.5 \text{ سم} \\ \therefore \text{أوجد محيط } \triangle PAB \text{ ؟} \end{aligned}$$

الحل

$$\begin{aligned} \therefore \text{محيط } \triangle PAB &= 5 + 5 + 5 = 15 \text{ سم} \\ \therefore \text{محيط } \triangle PAB &= 5 + 5 + 5 = 15 \text{ سم} \end{aligned}$$

(٧) في الشكل المقابل :-

أوجد طول  $١$  ب ؟

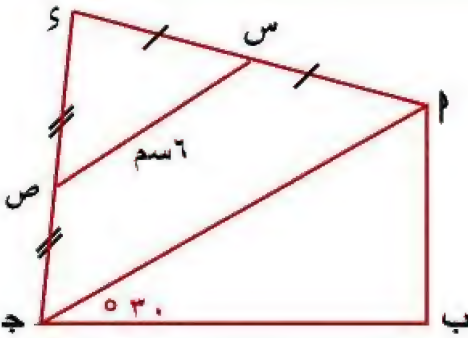
الحل

$\therefore$   $س$  منتصف  $١$  ب ،  $ص$  منتصف  $س$  ب

$\therefore$   $س$   $ص = \frac{١}{٢} ب$  ،  $\therefore ١٢ = ب$

في  $\Delta ١ ب ب$  ،  $\angle ١ ب ب = ٩٠^\circ$  ،  $\angle ١ ب ب = ٣٠^\circ$  ،

$\therefore ١ ب = \frac{١}{٢} ب = ٦ سم$



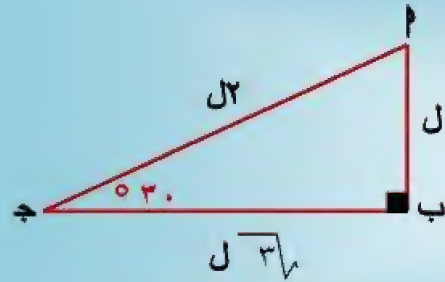
في الشكل المقابل :-

$١ ب ب$  قائم الزاوية في ب ،  $\angle ١ ب ب = ٣٠^\circ$  ،

فإن :  $\angle ١ ب ب = ٩٠^\circ - ٣٠^\circ = ٦٠^\circ$  ،

$\therefore$  المثلث  $١ ب ب$  يحتوي علي زاويتين قياسهما  $٣٠^\circ$  ،  $٦٠^\circ$

لذا يسمى مثلثاً قائم الزاوية ثلاثينياً ستينياً



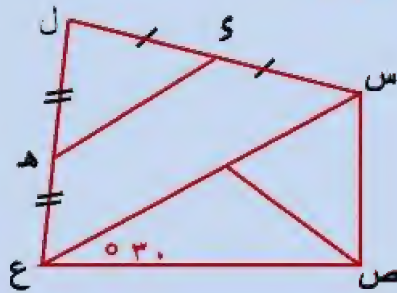
اجبه بنفسك

(٢) في الشكل المقابل :

$\angle ١ ب ب = ٩٠^\circ$  ،  $س$  منتصف  $س ل$  ،

$هـ$  منتصف  $ع ل$  ،  $م$  منتصف  $س ع$

أثبت أن :  $س هـ = ص م$



(١) في الشكل المقابل :

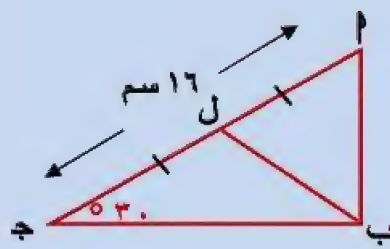
$١ ب ب$  مثلث فيه :  $\angle ١ ب ب = ٩٠^\circ$  ،

$\angle ١ ب ب = ٣٠^\circ$  ،  $١ ب = ١٦ سم$  ،  $ل$  منتصف  $١ ب$

أوجد :

① طول  $١ ب$  ،  $ب ل$

② محيط  $\Delta ١ ب ل$





## المثلث المتساوي الساقين



**المثلثات تصنف حسب أطوال أضلاعها إلى ثلاثة أنواع :**

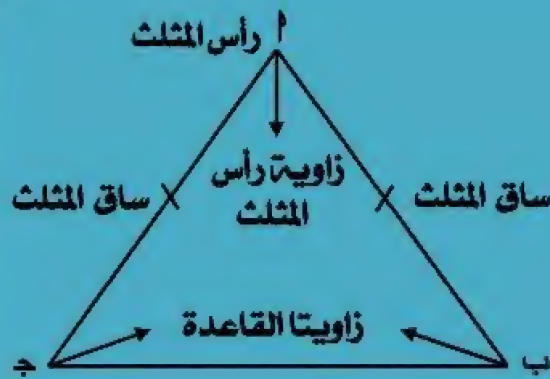
٢ مثلث متساوي الساقين

١ مثلث متساوي الأضلاع

٣ مثلث مختلف الأضلاع

وسوف ندرس هذا العام المثلث المتساوي الساقين بنظرياته

## المثلث المتساوي الساقين



$\Delta ABC$  مثلث متساوي الساقين حيث :

١  $AB = AC$  (  $AB$  ،  $AC$  ساقا المثلث )

٢  $\overline{BC}$  ( قاعدة المثلث )

٣ (  $A$  ) رأس المثلث

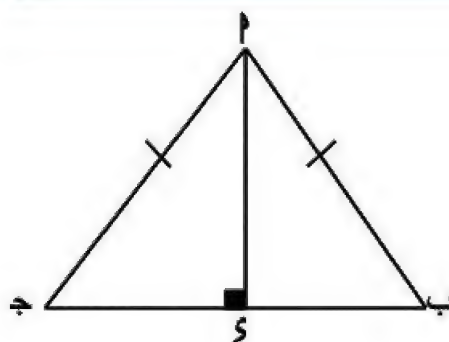
٤ (  $\hat{A}$  ) زاوية المثلث

٥ (  $\hat{B}$  ) ، (  $\hat{C}$  ) زاويتا قاعدة المثلث

## نظرية (١)

## نظريات المثلث المتساوي الساقين

زاويتا القاعدة في المثلث المتساوي الساقين متطابقتان



$AB = AC$  مثلث فيه  $AB = AC$

إثبات أن  $(\hat{B}) \equiv (\hat{C})$

نرسم  $AD \perp BC$

∴ في  $\Delta ABD$  ،  $\Delta ACD$  ،  $AB = AC$  ،  $AD = AD$  ،  $\angle ADB = \angle ADC = 90^\circ$

(١)  $AB = AC$  (معطى)

(٢)  $AD$  ضلع مشترك

(٣)  $\angle ADB = \angle ADC = 90^\circ$  (عملا)

∴  $\Delta ABD \equiv \Delta ACD$

∴  $\angle B = \angle C$

∴  $(\hat{B}) \equiv (\hat{C})$

المعطيات

المطلوب

العمل

البرهان

إذا كان المثلث متساوي الأضلاع فإن زواياه الثلاثة تكون متطابقة ويكون قياس كل منها  $60^\circ$ .

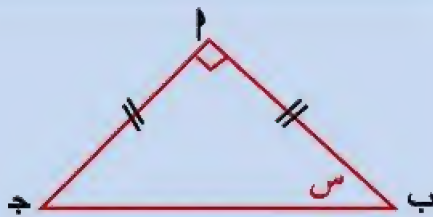
نتيجة (١)

قياس أي زاوية خارجية للمثلث يساوي مجموع قياس الزاويتين الداخلتين ما عدا المجاورة لها.

نتيجة (٢)

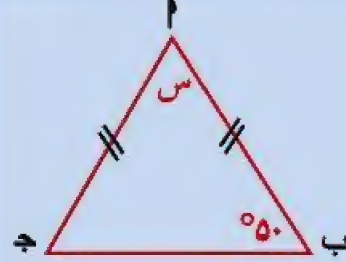
### تمارين متنوعة

(١) أوجد قيمة س في كل مما يأتي :-



$$\therefore \angle ب = \angle ب$$

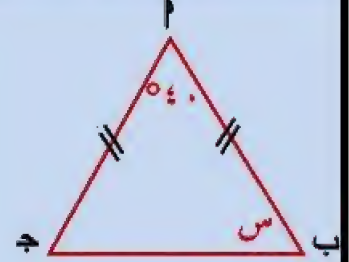
$$\therefore \angle ب = \angle ب = \frac{180^\circ - 90^\circ}{2} = 45^\circ$$



$$\therefore \angle ب = \angle ب$$

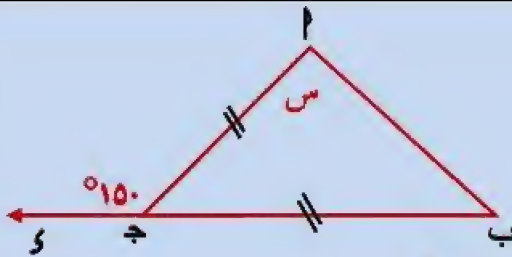
$$\therefore \angle ب = 50^\circ$$

$$س = 180^\circ - (50^\circ + 50^\circ) = 80^\circ$$



$$\therefore \angle ب = \angle ب$$

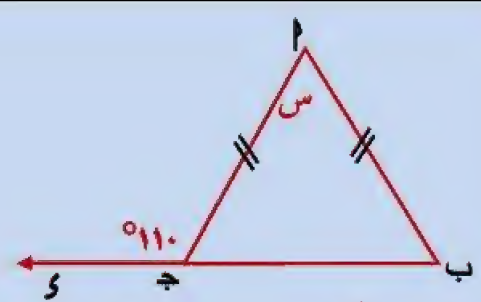
$$س = \frac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 70^\circ$$



$$\therefore \angle ب = \angle ب$$

( $\angle ب$ ) خارجة عن  $\Delta ب$

$$\therefore \angle ب = \angle ب = \frac{150^\circ}{2} = 75^\circ$$



$$\therefore \angle ب = 180^\circ - (\angle ب)$$

$$\therefore \angle ب = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$$

$$\therefore \angle ب = 70^\circ$$

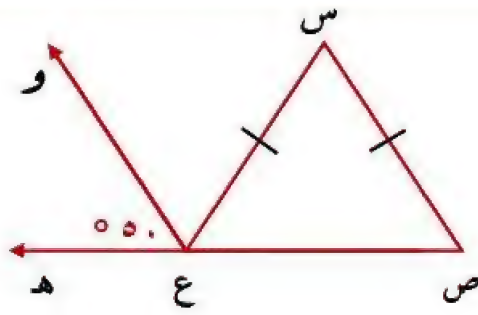
$$\therefore \angle ب = 70^\circ$$

في  $\Delta ب$

$\therefore$  مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة =  $180^\circ$

$$\therefore \angle ب = 180^\circ - (70^\circ + 70^\circ) = 40^\circ$$



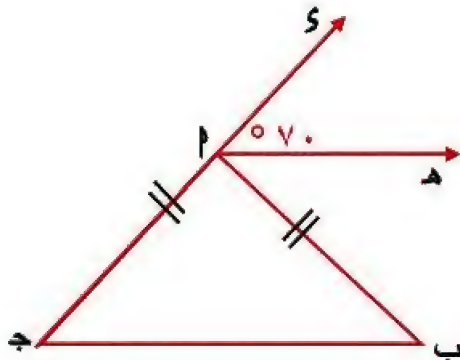


(٢) في الشكل المقابل :-

ص س // ع و ، س ص = س ع  
أوجد قياسات زوايا المثلث س ص ع ؟

**الحل**

∴ ص س // ع و  
∴ و (ص) = و (ع) ، و (و) = و (ه) [متناظرتان]  
∴ س ص = س ع ∴ و (ص) = و (ع) ، و (و) = و (ه) = 50°  
∴ مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = 180°  
∴ و (س) = 180° - 50° - 50° = 80°

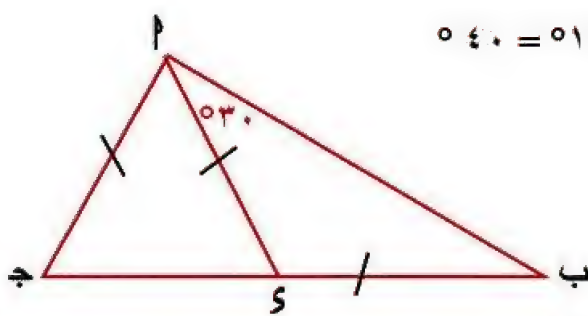


(٣) في الشكل المقابل :-

ا ب = ا ج ، ا ب // ا ه  
أوجد قياسات زوايا المثلث ا ب ج ؟

**الحل**

ا ب // ا ه ∴ و (ا) = و (ه) ، و (ا) = و (ب)  
ا ب = ا ج ∴ و (ب) = و (ج)  
∴ مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = 180°  
∴ و (ا ب ج) = 180° - 70° - 70° = 40°



(٤) في الشكل المقابل :-

ا ب = ا س ، و (ب ا س) = 30°  
أوجد : و (س ا ج) ؟

**الحل**

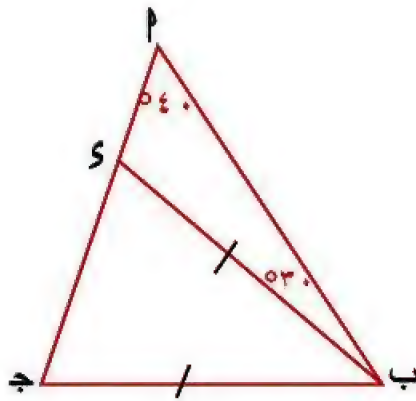
في Δ ا ب س  
ا ب = ا س ∴ و (ب) = و (س) ، و (ب ا س) = 30°  
∴ مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = 180°  
∴ و (ا ب س) = 180° - 30° - 30° = 120°  
∴ و (ب ا ج) = 180° - 120° = 60°  
في Δ ا س ج  
ا س = ا ج ∴ و (س) = و (ج) ، و (س ا ج) = 30°  
∴ مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = 180°  
∴ و (س ا ج) = 180° - 60° - 60° = 60°

### (٥) في الشكل المقابل :-

إذا كان :  $\angle B = 50^\circ$

أوجد :  $\angle A$  ،  $\angle C$  ،  $\angle D$  ؟

**الحل**



$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$

لأنها خارجة عن  $\triangle ABC$

$$\angle A + 50^\circ + 50^\circ = 180^\circ$$

$$\angle A = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$$

$$\angle C = 50^\circ$$

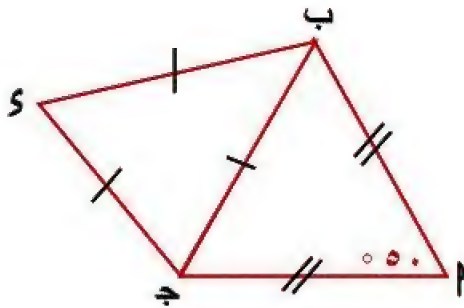
### (٦) في الشكل المقابل :-

$\angle A = 50^\circ$  ،  $\angle B = 60^\circ$

$\angle C$  متساوي الأضلاع

أوجد :  $\angle D$  ،  $\angle E$  ؟

**الحل**



$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$

في  $\triangle ABC$

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$

$$\angle C = 180^\circ - 50^\circ - 60^\circ = 70^\circ$$

$$\angle D = 70^\circ$$

### (٧) في الشكل المقابل :-

$\angle A$  متساوي الأضلاع

$\angle B$  متساوي الساقين

أوجد :  $\angle C$  ،  $\angle D$  ،  $\angle E$  ؟

①  $\angle A$  ، ②  $\angle B$  ، ③  $\angle C$

**الحل**

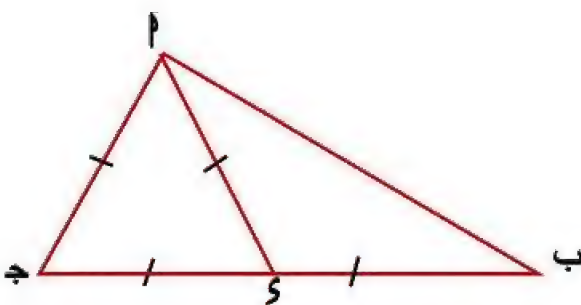
$\triangle ABC$  متساوي الأضلاع

$$\angle A = 60^\circ$$

$\triangle ABC$  متساوي الساقين

$$\angle B = 60^\circ$$

$$\angle C = 60^\circ$$





## ملاحظات

- ① كل من زاويتي القاعدة في المثلث المتساوي الساقين حادة .
- ② زاوية الرأس في المثلث المتساوي الساقين من الممكن أن تكون حادة أو قائمة أو منفرجة .

## اجب بنفسك

(١) أوجد قيمة الرموز المستخدمة في قياسات الزوايا الآتية :-

<p>..... = م ..... = س</p>	<p>..... = ل ، ..... = ع</p>	<p>..... = ص ، ..... = س</p>
--------------------------------	------------------------------	------------------------------

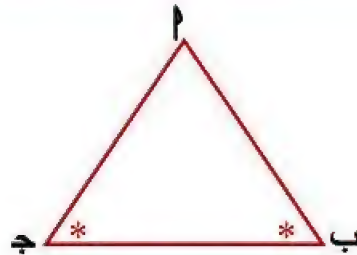
<p>(٢) في الشكل المقابل :</p> <p>ب = ج ، و (س ب) = 30° ، و (س) = 42°</p> <p><u>أوجد :</u></p> <p>① و (ج)</p> <p>② و (ب ج)</p>	<p>(١) في الشكل المقابل :</p> <p>ب = ج ، و (ب) = 55° ، و (س) = 55°</p> <p>Δ ب س متساوي الأضلاع</p> <p><u>أوجد :</u> و (ب س)</p>
---	---

## عكس نظرية المثلث المتساوي الساقين

## الدرس الثالث

## عكس النظرية (١)

إذا تطابقت زاويتان في مثلث فإن الضلعين المقابلين لهاتين الزاويتين يكونان متطابقين ويكون المثلث متساوي الساقين.



فمثلاً: في الشكل المقابل :-

إذا كان :  $\angle ب = \angle ج$  (  $\hat{ب} = \hat{ج}$  )

فإن :  $أب = أ ج$

إذا تطابقت زوايا مثلث فإنه يكون متساوي الأضلاع

نتيجة

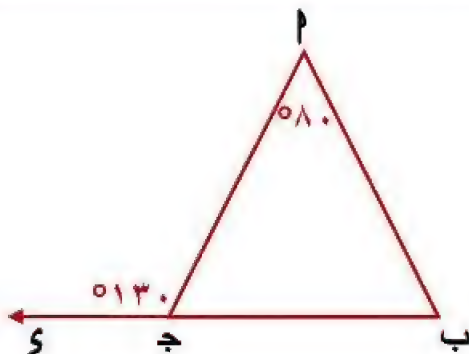
إذا كان قياس أى زاوية في المثلث المتساوي الساقين تساوى  $60^\circ$  كان المثلث متساوي الساقين

ملاحظة

## (١) في الشكل المقابل :-

إثبت أن المثلث  $أ ب ج$  متساوي الساقين ؟

الحل



$$\therefore \angle ب ج س = \angle أ = 80^\circ \text{ (زاوية مستقيمة)}$$

$$\therefore \angle ب ج أ = 130^\circ - 80^\circ = 50^\circ$$

في  $\Delta أ ب ج$

$$\therefore \text{مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة} = 180^\circ$$

$$\therefore \angle أ = 180^\circ - [50^\circ + 80^\circ] = 50^\circ$$

$$\therefore \angle أ = \angle ب ج أ = 50^\circ$$

$$\therefore أب = أ ج$$

$\therefore \Delta أ ب ج$  متساوي الساقين



## (٢) في الشكل المقابل :-

$AB = AC$  ،  $BC \parallel AD$  ،  $AD \parallel BC$  ؟

أثبت أن :  $\triangle ABC$  متساوي الساقين ؟

## الحل

في  $\triangle ABC$  :  $AB = AC$  :

$$\therefore \angle B = \angle C \quad (\hat{B}) = (\hat{C})$$

$$\therefore BC \parallel AD$$

(١)

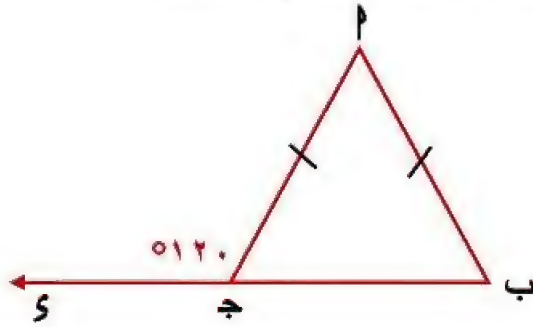
$$(٢) \quad \angle B = \angle C \quad (\text{بالتناظر})$$

$$(٣) \quad \angle B = \angle C \quad (\text{بالتناظر})$$

من ١ ، ٢ ، ٣ ينتج أن :

$$\angle B = \angle C \quad (\text{من ١ ، ٢ ، ٣})$$

$\therefore \triangle ABC$  متساوي الساقين



## (٣) في الشكل المقابل :-

أثبت أن :  $\triangle ABC$  متساوي الساقين ؟

## الحل

$$\therefore \angle B = \angle C \quad (\text{زاوية مستقيمة})$$

$$\therefore \angle B = \angle C \quad (\text{من ١ ، ٢ ، ٣})$$

في  $\triangle ABC$  :  $AB = AC$  :

$$\therefore \angle B = \angle C \quad (\hat{B}) = (\hat{C})$$

$\therefore$  مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلية =  $180^\circ$

$$\therefore \angle B = \angle C \quad (\text{من ١ ، ٢ ، ٣})$$

$$\therefore \angle B = \angle C \quad (\text{من ١ ، ٢ ، ٣})$$

$\therefore \triangle ABC$  متساوي الأضلاع

## (٤) في الشكل المقابل :-

$BC \parallel AD$  ،  $AD$  ينصف  $BC$  (  $D$  ) ؟

أثبت أن :  $AB = AC$  متساوي الساقين ؟

## الحل

$BC \parallel AD$  :

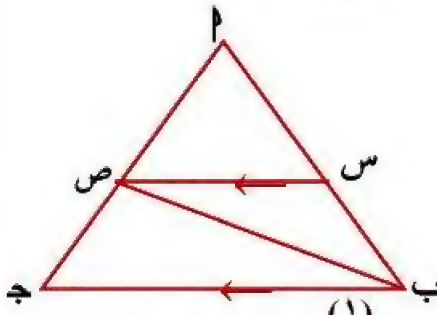
$$\therefore \angle B = \angle C \quad (\text{من ١ ، ٢ ، ٣})$$

$$(٢) \quad \angle B = \angle C \quad (\text{من ١ ، ٢ ، ٣})$$

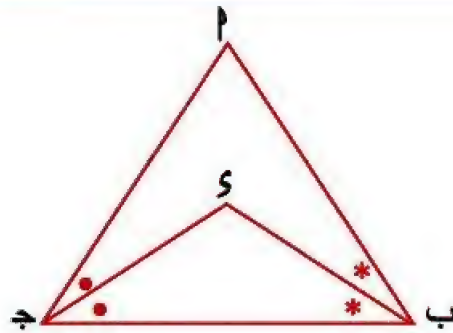
من ١ ، ٢ ، ٣ ينتج أن :

$$\angle B = \angle C \quad (\text{من ١ ، ٢ ، ٣})$$

$\therefore AB = AC$  متساوي الساقين



(٥) في الشكل المقابل :-



$$AB = B$$

$$B \text{ ينصف } AB$$

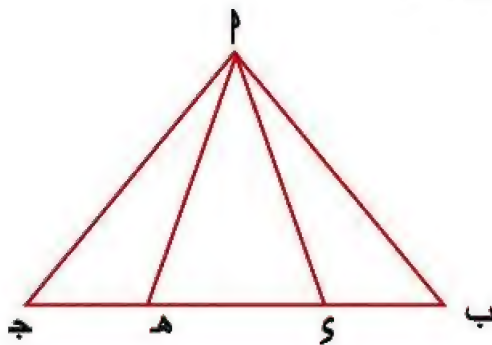
$$J \text{ ينصف } AB$$

أثبت أن :  $AB = B$  مثلث متساوي الساقين ؟

الحل

$$\begin{aligned} AB &= B \\ B \text{ ينصف } AB &\therefore \angle PSB = \angle PSJ \\ J \text{ ينصف } AB &\therefore \angle PSJ = \angle PSB \\ \text{من ١ ، ٢ ، ٣ ينتج أن :} \\ \angle PSB &= \angle PSJ \\ \therefore AB &= B \text{ مثلث متساوي الساقين} \end{aligned}$$

(٦) في الشكل المقابل :-



$$AB = B, AB = S$$

أثبت أن :  $AB = S$  مثلث متساوي الساقين ؟

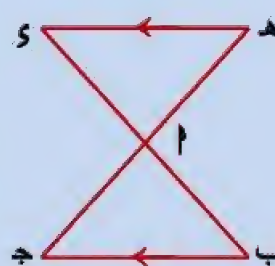
الحل

$$\begin{aligned} \triangle AB, \triangle BS, \triangle Sه \\ AB = B \\ AB = S \\ \left. \begin{array}{l} \angle PSB = \angle PSه \\ \angle PSه = \angle PSB \end{array} \right\} \text{فيهما} \\ \angle PSB = \angle PSه \text{ [لأن : } AB = B \text{]} \\ \therefore AB = S \\ \text{ومن التطابق ينتج أن : } AB = S \end{aligned}$$

$\therefore \triangle AB, \triangle BS$  متساوي الساقين

اجب بنفسك

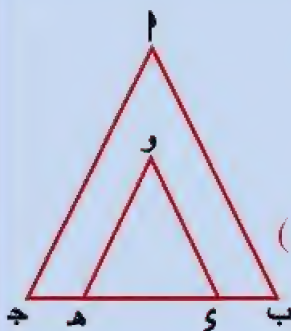
(١) في الشكل المقابل :



$$AB = B, AB = S$$

أثبت أن :  $AB = S$

(٢) في الشكل المقابل :



$$AB = B, AB = S$$

$$AB = S$$

أثبت أن :

$$\textcircled{1} \angle PSB = \angle PSه$$

$$\textcircled{2} \angle PSB = \angle PSه$$



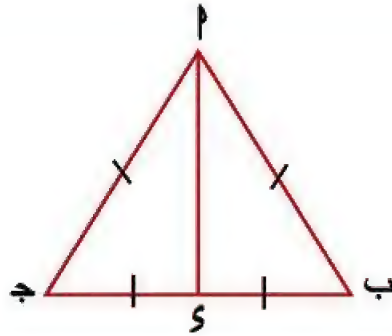
## نتائج على نظريات المثلث المتساوي الساقين



## نتيجة (١)

متوسط المثلث المتساوي الساقين المرسوم من زاوية الرأس ينصف زاوية الرأس ويكون عموديا على القاعدة

## في الشكل المقابل :-



إذا كان  $م ب ج$  مثلثا فيه :

$م ب = م ج$  ،  $س$  متوسط (  $س$  منتصف  $ب ج$  ) فإن :-

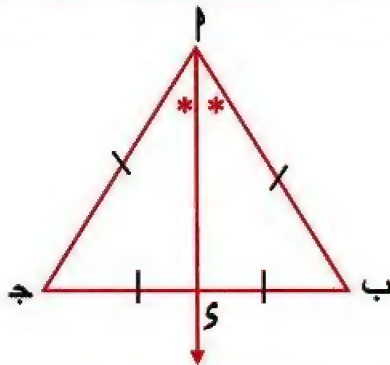
١  $س$  ينصف (  $ب م$  )

٢  $س \perp ب ج$

منصف زاوية الرأس في المثلث المتساوي الساقين ينصف القاعدة ويكون عموديا عليها

## نتيجة (٢)

## في الشكل المقابل :-



إذا كان  $م ب ج$  مثلثا فيه :

$م ب = م ج$  ،  $س$  ينصف (  $ب م$  ) فإن :-

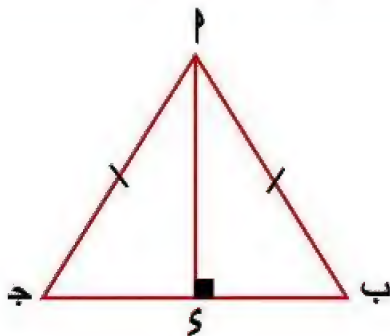
١  $س$  منتصف  $ب ج$

٢  $س \perp ب ج$

المستقيم المرسوم من رأس المثلث المتساوي الساقين عموديا على القاعدة ينصف كلا من القاعدة وزاوية الرأس

## نتيجة (٣)

## في الشكل المقابل :-



إذا كان  $م ب ج$  مثلثا فيه :

$م ب = م ج$  ،  $س \perp ب ج$  فإن :-

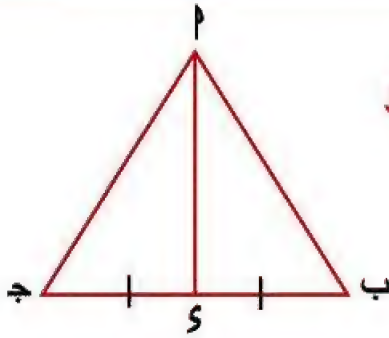
١  $س$  منتصف  $ب ج$

٢  $\angle (ب م س) = \angle (ج م س)$





(١) في الشكل المقابل :-



أ ب ج مثلث فيه  $\angle \text{ب} = 50^\circ$  ، و  $\angle \text{ب} = 65^\circ$  ،  $\text{س} \text{ متوسط}$   
أوجد :  $\angle \text{ب} \text{ (س)}$  ، و  $\angle \text{س} \text{ (ج)}$  ؟

الحل

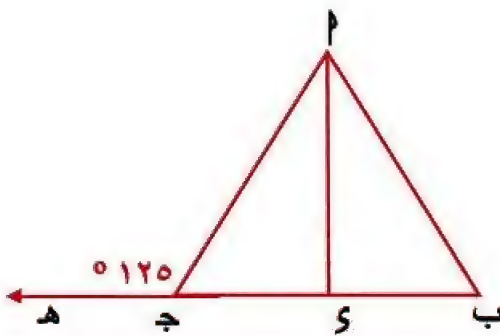
س متوسط  $\text{س} \text{ ينصف (ب ج)}$

$$\angle \text{ب (س)} = \frac{50}{2} = 25^\circ$$

$$\angle \text{س (ج)} = 90^\circ$$

س متوسط  $\text{س} \perp \text{ب ج}$

(٢) في الشكل المقابل :-



أ ب ج مثلث فيه  $\angle \text{ب} = 35^\circ$  ، و  $\angle \text{ب} = 125^\circ$  ،  
أثبت أن : ①  $\text{س} \perp \text{ب ج}$  ② س متوسط

الحل

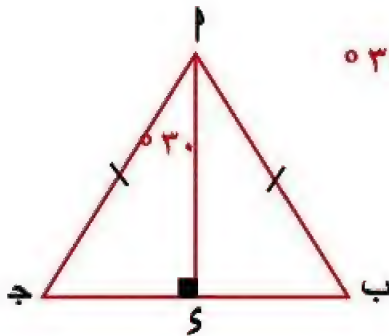
$\angle \text{ب (ج)} = 125^\circ$  خارجة عن  $\Delta \text{ س ج ب}$

$$\angle \text{س (ج)} = 125^\circ - 35^\circ = 90^\circ$$

(أولاً)  $\therefore \text{س} \perp \text{ب ج}$

$\therefore \text{س} \text{ ينصف (ب ج)}$   $\therefore \Delta \text{ ب ج س}$  متساوي الساقين  $\therefore \text{س} \text{ متوسط في } \Delta \text{ ب ج س}$  (ثانياً)

(٣) في الشكل المقابل :-



أ ب ج  $\text{ب ج} = 10 \text{ سم}$  ،  $\text{س} \perp \text{ب ج}$  ، و  $\angle \text{ب} = 30^\circ$   
 ① أوجد : طول ب س ؟  
 ② أثبت أن :  $\Delta \text{ ب ج س}$  متساوي الأضلاع

الحل

$\therefore \text{ب ج} = 10 \text{ سم}$  ،  $\text{س} \perp \text{ب ج}$

$\therefore \text{س} \text{ متوسط} \iff \text{ب ج} = \text{س ج} = \text{س ب} = \frac{1}{2} \text{ ب ج} = 5 \text{ سم}$

$\text{س} \text{ ينصف (ب ج)} \iff \angle \text{ب (س)} = \angle \text{س (ج)} = 30^\circ$

$\therefore$  مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلية  $= 180^\circ$

$$\therefore \angle \text{ب} = 180^\circ - [90^\circ + 30^\circ] = 60^\circ$$

$\therefore \Delta \text{ ب ج س}$  متساوي الساقين ، و  $\angle \text{ب} = 60^\circ$

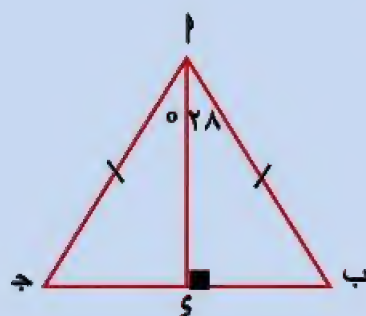
$\therefore \Delta \text{ ب ج س}$  متساوي الأضلاع

(إحدى زواياه)

## اجب بنفسك

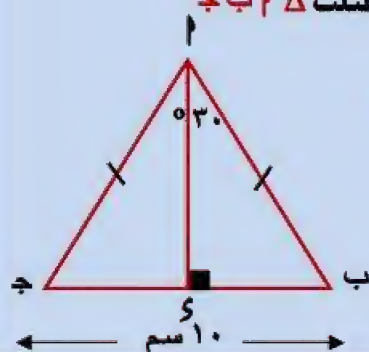
(١) في الشكل المقابل :

$AB = AC$  ،  $AD \perp BC$  ،  
 $\angle B = 6^\circ$  سم ،  $\angle C = 28^\circ$  ،  
 أوجد :

①  $\angle A$  ( )② طول  $AD$ 

(٢) في الشكل المقابل :

$AB = AC$  ،  $AD \perp BC$  ،  $AD = 10$  سم ،  
 $\angle C = 30^\circ$  ،

① أوجد طول كل من  $AB$  ،  $BC$  :② ما عدد محاور تماثل المثلث  $ABC$  ؟③ ما مساحة  $ABC$  ؟

مع أرق الأمنيات بالتفوق الباهر  
 /  
 مدرس الرياضيات



## الوحدة الخامسة

✓ **التيابن**

✓ **المقارنة بين قياسات الزوايا في امثلث**

✓ **المقارنة بين أطوال الأضلاع في امثلث**

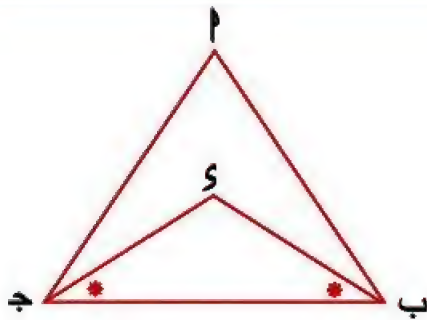
✓ **مثبينة امثلث**

## التباين



لأي أربعة أعداد س، ص، ع، م فإن :-

- ① إذا كان س < ص فإن : س + ع < ص + ع
- ② إذا كان س < ص فإن : س - ع < ص - ع
- ③ إذا كان س < ص ، ع (عدد موجب) فإن : س + ع < ص + ع
- ④ إذا كان س < ص ، ع (عدد سالب) فإن : س - ع < ص - ع
- ⑤ إذا كان س < ص ، ص < ع فإن : س < ع
- ⑥ إذا كان س < ص ، م < ع فإن : س + م < ص + ع



(١) في الشكل المقابل :-

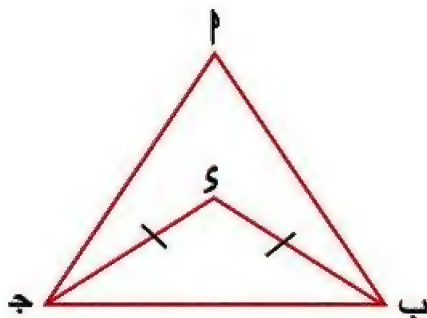
و (أ ب س) < و (أ ج س)  
و (ب ج س) = و (أ ب ج)  
إثبت أنه : و (ب س) < و (أ ج س)

**الحل**

- (١) و (أ ب س) < و (أ ج س)
- (٢) و (ب ج س) = و (أ ب ج)

**بجمع (١) ، (٢) ينتج أن :**

و (أ ب س) + و (ب ج س) < و (أ ج س) + و (أ ب ج)  
∴ و (ب س) < و (أ ج س)



(٢) في الشكل المقابل :-

و (أ ب س) < و (أ ج س) ، و ب = و ج  
إثبت أنه : و (ب س) < و (أ ج س)

**الحل**

- (١) و (أ ب س) < و (أ ج س)
- ∴ و ب = و ج

- (٢) و (ب ج س) = و (أ ب ج)

**بجمع (١) ، (٢) ينتج أن :**

و (أ ب س) + و (ب ج س) < و (أ ج س) + و (أ ب ج)  
∴ و (ب س) < و (أ ج س)



(٣) في الشكل المقابل :-

أثبت أن :  $\angle (ب\hat{د}ج) < \angle (أ\hat{د}ج)$  ؟

**الحل**

**العمل نرسم د**

$\therefore \angle (ب\hat{د}ه) < \angle (ب\hat{أ}د)$

$\therefore \angle (ج\hat{د}ه) < \angle (أ\hat{د}ج)$

**بجمع (١) ، (٢) ينتج أن :**

$\therefore \angle (ب\hat{د}ه) + \angle (ج\hat{د}ه) < \angle (ب\hat{أ}د) + \angle (أ\hat{د}ج)$

$\therefore \angle (ب\hat{د}ج) < \angle (أ\hat{د}ج)$

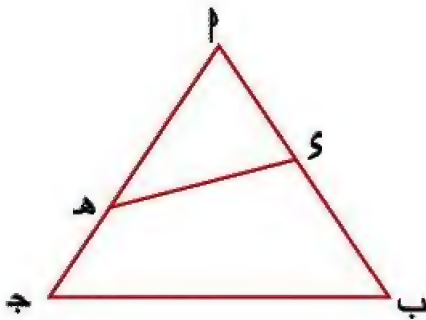
**اجب بنفسك**

(٤) في الشكل المقابل :-

**إذا كان :**  $أد < ب د$

،  $\angle (أ\hat{د}ه) = \angle (ب\hat{د}ه)$

**أثبت أن :**  $أد < ب د$  ؟



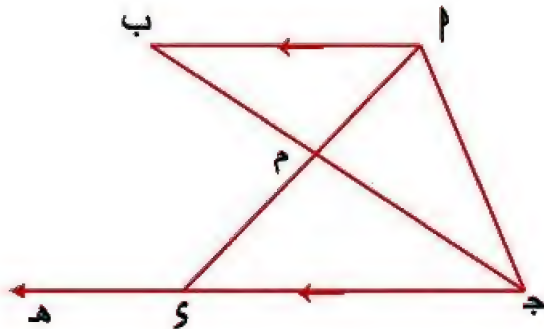
(٥) في الشكل المقابل :-

**إذا كان :**  $أد \parallel ب د$

**أثبت أن :**

١  $\angle (أ\hat{د}ج) < \angle (ب\hat{د}ج)$

٢  $\angle (أ\hat{د}ج) < \angle (ب\hat{د}ج)$

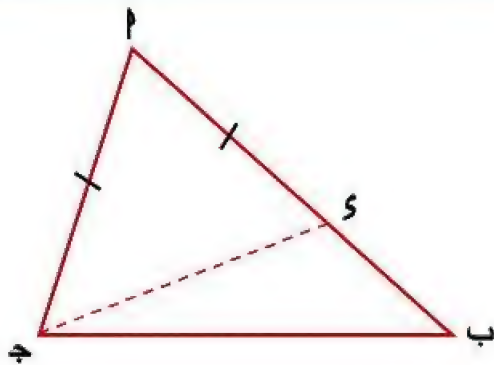


## المقارنة بين قياسات الزوايا في المثلث



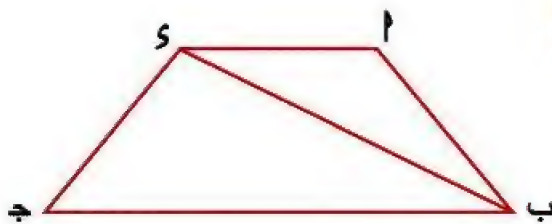
## نظرية

إذا اختلف طولا ضلعين في مثلث فأكبرهما في الطول تقابله زاوية أكبر في القياس من الزاوية المقابلة للضلع الآخر.



- المعطيات**  $\Delta ABC$  مثلث فيه  $AB < AC$
- المطلوب** إثبات أن:  $\angle C < \angle B$
- العمل** نأخذ  $S \in \overline{BC}$  بحيث:  $AS = AC$
- البرهان** في  $\Delta ACS$   $\because AS = AC$
- (١)  $\therefore \angle C = \angle ASC$
- $\because \angle ASC$  خارجة عن  $\Delta ACS$
- (٢)  $\therefore \angle C < \angle ASC$
- من (١)، (٢) ينتج أن:
- $\angle C < \angle ASC$
- $\therefore \angle C < \angle B$
- $\therefore \angle C < \angle B$

## تمارين متنوعة



## (١) في الشكل المقابل :-

$AB < AC$  ،  $\angle B < \angle C$

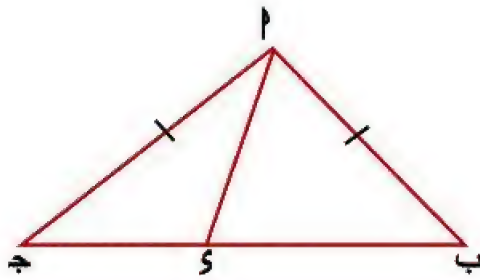
إثبت أن:  $\angle A < \angle D$

## الحل

- في  $\Delta ABC$   $\because AB < AC$
- (١)  $\therefore \angle B < \angle C$
- في  $\Delta ADC$   $\because AD < DC$
- $\therefore \angle D < \angle C$
- بجمع (١)، (٢) ينتج أن:
- $\angle B < \angle C$  و  $\angle D < \angle C$
- $\therefore \angle B < \angle D$



(٢) في الشكل المقابل :-



$$AP = PC, \angle B > \angle C$$

برهن أن:  $\angle B < \angle C$

**الحل**

في  $\triangle APC$

$$\because AP = PC$$

$$\therefore \angle B < \angle C \quad (١)$$

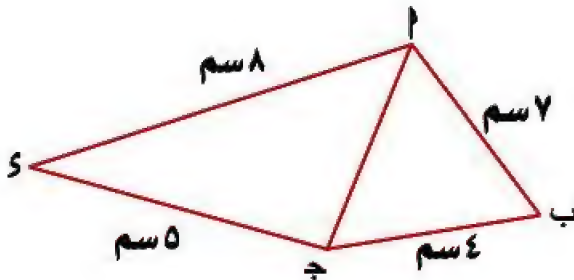
$\angle APC$  زاوية خارجة عن  $\triangle APC$

$$\therefore \angle B < \angle C \quad (٢)$$

من (١) ، (٢) ينتج أن:

$$\therefore \angle B < \angle C$$

(٣) في الشكل المقابل :-



برهن أن:  $\angle B < \angle C$

**الحل**

في  $\triangle ABC$

$$\because AB < AC$$

$$\therefore \angle B < \angle C \quad (١)$$

في  $\triangle APC$

$$\because PC < AC$$

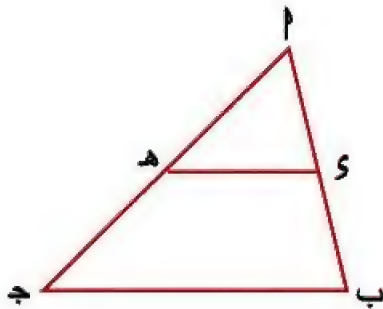
$$\therefore \angle C < \angle APC \quad (٢)$$

بجمع (١) ، (٢) ينتج أن:

$$\therefore \angle B < \angle APC < \angle C$$

$$\therefore \angle B < \angle C$$

(٤) في الشكل المقابل :-



**الحل**

في  $\triangle ABC$

$$\because AB < AC$$

$$\therefore \angle B < \angle C \quad (١)$$

$DE$  منتصف  $AB$  ،  $DE$  منتصف  $AC$

$$\therefore DE \parallel BC$$

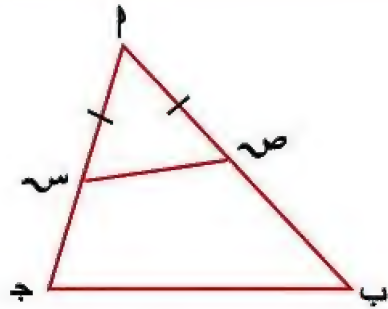
$$\therefore \angle B = \angle ADE \quad (٢)$$

$$\therefore \angle C = \angle ADE \quad (٣)$$

من (١) ، (٢) ، (٣) ينتج أن:

$$\therefore \angle B < \angle C$$

## (٥) في الشكل المقابل :-



أ ب ج  $\Delta$  فيه :  $ا س = ا ص$  ،  $س ج > ص ب$

إثبت أن :  $و (ب) > و (ج)$

## الحل

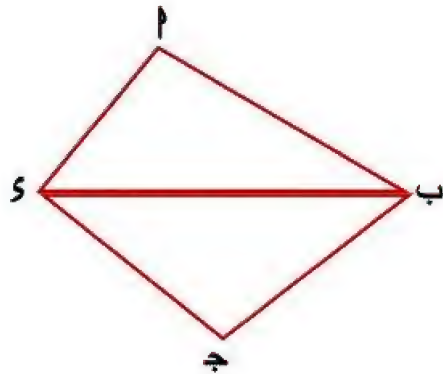
$\therefore ا س = ا ص$  ،  $\therefore س ج > ص ب$

$\therefore ا س + س ج > ا ص + ص ب$

$\therefore ا ب > ا ج$

$\therefore و (ب) > و (ج)$

## (٦) في الشكل المقابل :-



أ ج < ا س

ب ج = ا ج

إثبت أن :  $و (ا ج) < و (ا ب)$

## الحل

في  $\Delta ا ب ج$

$\therefore ا ب < ا س$

في  $\Delta ا ب ج$

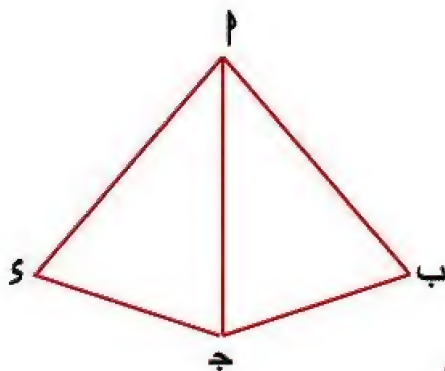
$\therefore ب ج = ا ج$

بجمع (١) ، (٢) ينتج أن :

$\therefore و (ا ب) + و (ا ج) < و (ا ب) + و (ا ج)$

$\therefore و (ا ج) < و (ا ب)$

## (٧) في الشكل المقابل :-



أ ب < ب ج ،  $ا ج < ا س$

برهن أن :  $و (ب ج) < و (ب ا)$

## الحل

في  $\Delta ا ب ج$

$\therefore ا ب < ب ج$

في  $\Delta ا ج س$

$\therefore ا ج < ا س$

بجمع (١) ، (٢) ينتج أن :

$\therefore و (ا ب) + و (ا ج) < و (ا ب) + و (ا ج)$

$\therefore و (ب ج) < و (ب ا)$



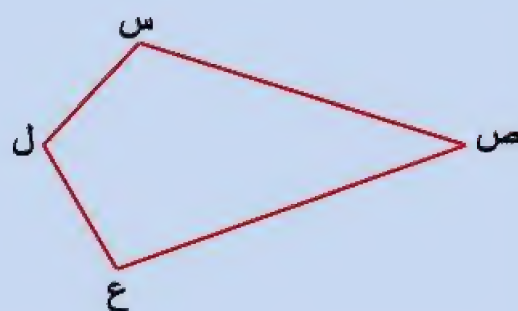
## اجب بنفسك

(١) في الشكل المقابل :

س ص &lt; س ل ، ص ع &lt; ع ل

برهن أن :

و (س ل ع) &lt; و (س ص ع)



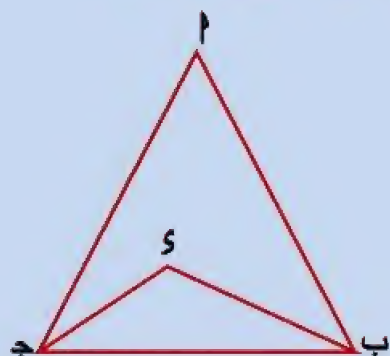
(٢) في الشكل المقابل :

ا ب ج مثلث فيه : ا ب = ا ج

، و ب &lt; و ج

برهن أن :

و (ا ب ج) &lt; و (ا ج ب)



مع أرق الأمنيات بالتفوق الباهر

/ محمد محمود

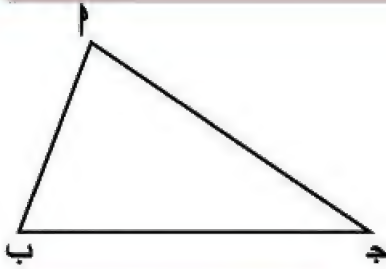
مدرس الرياضيات

## المقارنة بين أطوال الأضلاع في المثلث



## نظرية

إذا اختلف قياس زاويتين في مثلث فأكبرهما في القياس يقابلها ضلع أكبر في الطول من الذي يقابل الأخرى .



المعطيات  $\Delta \alpha \beta \gamma$  مثلث فيه :  $\alpha < \beta$  و  $(\gamma)$

المطلوب إثبات أن :  $\alpha < \beta$

البرهان  $\alpha$  ،  $\beta$  قطعتان مستقيمتان

العلاقة بين طوليهما تتحدد بإحدى الصور الآتية :

٣ :  $\alpha > \beta$

$\therefore \alpha > \beta$  و  $(\gamma)$

يطابق المعطى

$\therefore$  تتحقق النظرية

٢ :  $\alpha < \beta$

$\therefore \alpha < \beta$  و  $(\gamma)$

غير منطقي

لأن :  $\alpha < \beta$  و  $(\gamma)$

١ :  $\alpha = \beta$

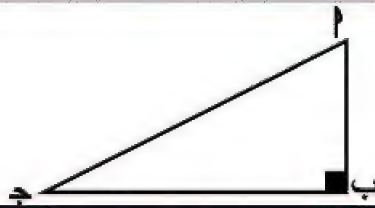
$\therefore \alpha = \beta$  و  $(\gamma)$

غير منطقي

لأن :  $\alpha < \beta$  و  $(\gamma)$

في المثلث القائم الزاوية يكون الوتر هو أطول أضلاع المثلث

نتيجة (١)



إذا كان :  $\alpha \beta \gamma$  مثلثا قائم الزاوية في  $\beta$

فإن :  $\alpha < \beta$  ،  $\beta < \gamma$

لاحظ أن : في المثلث المنفرج الزاوية الضلع المقابل للزاوية المنفرجة هو أطول أضلاع المثلث

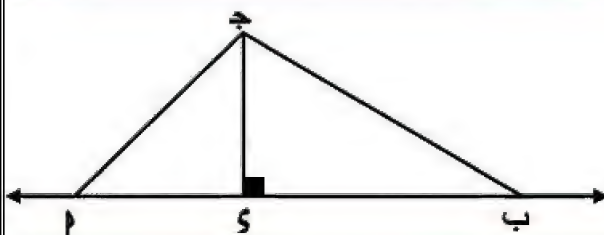
طول القطعة المستقيمة العمودية المرسومة من نقطة خارج مستقيم معلوم إلى هذا المستقيم أصغر من طول أي قطعة مستقيمة مرسومة من هذه النقطة إلى المستقيم المعلوم .

نتيجة (٢)

من الشكل المقابل نستنتج أن :

$\alpha \beta \gamma$  ،  $\alpha > \beta$  ،  $\beta > \gamma$

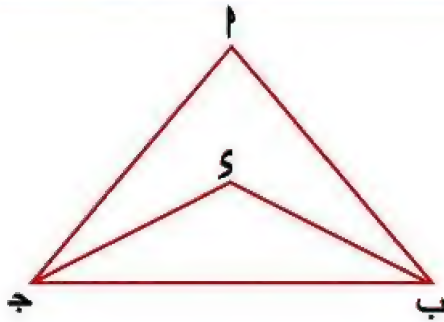
ويكون بعد النقطة  $\gamma$  عن  $\alpha \beta$  هو طول  $\gamma$





تمارين متنوعة

(١) في الشكل المقابل :-



$AB < AC$   
 ب س ينصف (أ ب ج) ، ج س ينصف (أ ج س)

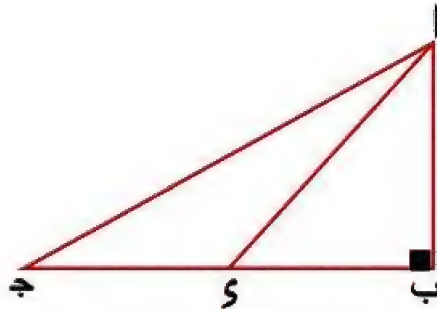
إثبت أن :  $AB < AC$

الحل

$\because AB < AC \therefore \angle C < \angle B$   
 $\because$  ب س ينصف (أ ب ج)  $\therefore \angle C = \angle BSC$   
 $\because$  ج س ينصف (أ ج س)  $\therefore \angle C = \angle CSB$   
 من (١) ، (٢) ، (٣) ينتج أن :

$\therefore \angle C < \angle BSC \Leftarrow \therefore AB < AC$

(٢) في الشكل المقابل :-



أ ب ج مثلثا قائم الزاوية في ب ،  $S \in AB$

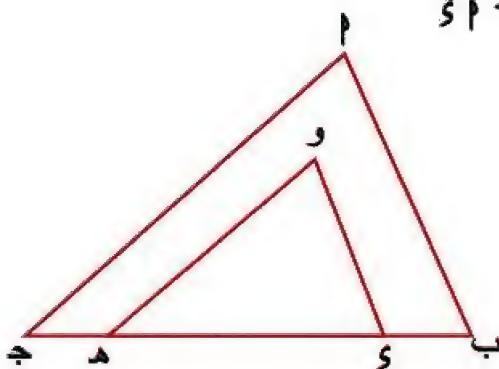
إثبت أن :  $AS < BS$

الحل

في  $\triangle ABS$   
 $\because$   $\triangle ABC$  قائم الزاوية في ب  $\therefore \angle C < \angle A$   
 $\because$  (أ ب ج) زاوية خارجة عن  $\triangle ABS$   
 $\therefore \angle C < \angle ASB$   
 من (١) ، (٢) ينتج أن :

$\therefore \angle C < \angle ASB \Leftarrow \therefore AS < BS$

(٣) في الشكل المقابل :-



إذا كان :  $AB < AC$

أ ب // و د ، أ ج // و ه

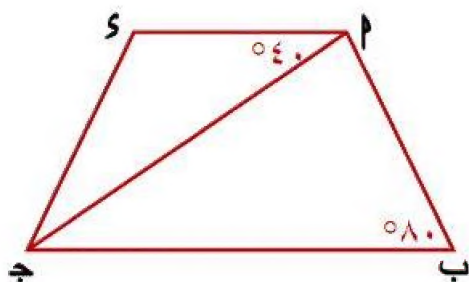
برهن أن :  $AD < AE$

الحل

في  $\triangle ABC$   
 $\because AB < AC \therefore \angle C < \angle B$   
 $\because$  أ ب // و د  $\therefore \angle C = \angle BDC$   
 $\because$  أ ج // و ه  $\therefore \angle B = \angle BHE$   
 من (١) ، (٢) ، (٣) ينتج أن :

$\therefore \angle BDC < \angle BHE \Leftarrow \therefore AD < AE$

#### (٤) في الشكل المقابل :-


$$\begin{aligned} \circ 8. &= (\hat{A} \hat{B}) \cup, \text{ ب ج // س } \\ \circ 4. &= (\hat{A} \hat{S}) \cup, \end{aligned}$$

اثبت أن:  $a < b$

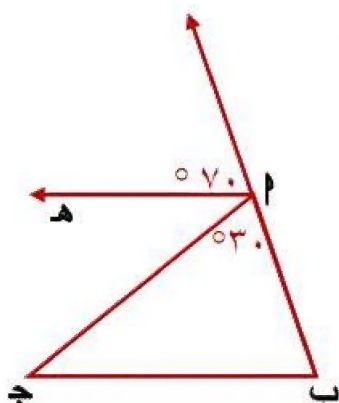
### الحل

$$\begin{aligned} & \therefore \angle B = (\angle B) = (\angle A) = 40^\circ \\ & \text{في } \triangle B \quad \therefore \text{مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلية} = 180^\circ \\ & \therefore (\angle B) = (\angle A) = 40^\circ + 80^\circ - 180^\circ = 60^\circ \\ & \therefore (\angle B) < (\angle A) \quad \Leftarrow \therefore \angle B < \angle A \end{aligned}$$

### (هـ) فى الشكل المقابل :-

**إذا كان : م ه // ب ج**

اثبت أن:  $a < b$



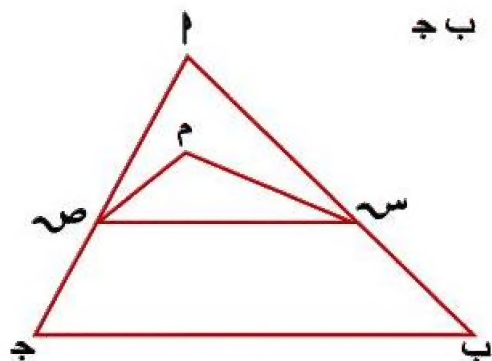
## الحل

$\therefore \Delta \text{ ب ج ، ا ج قاطع لهما}$   
 $\therefore \text{و (ب) = و (ا ج) = ٧٠} \quad [\text{بالتناظر}]$   
 $\text{و (ج) = و (ا ج) = ٣٠} \quad [\text{بالتبادل}]$   
 في  $\Delta \text{ ب ج}$

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Leftrightarrow \left(\frac{a}{b}\right) \cup < \left(\frac{c}{d}\right) \cup$$

### (٦) في الشكل المقابل :-

ا ب < ج ، س ص // ب ج  
م س ینصف (ا س ص) ، م ص ینصف (ا ص س)  
پہن ان : م س < م ص



## الحل

(۱)  $\therefore \text{ا} < \text{ج}$  (ج)  $\therefore \text{و} < \text{ب}$  (ب)

(۲)  $\therefore \text{س} // \text{ب} \text{ ج}$  (ب)  $\therefore \text{و} = \text{ا} \text{س} \text{ص}$  (ب)

(۳)  $\therefore \text{و} = \text{ا} \text{ص} \text{س}$  (ج)

(۴) **من (۱)، (۲)، (۳) نتیجہ ان:**  $\text{و} < \text{ا} \text{ص} \text{س}$  (ا)  $\text{و} < \text{ا} \text{س} \text{ص}$

(۵)  $\therefore \text{م} \text{س} \text{ینصف} \text{ا} \text{ص}$  (ا)  $\therefore \text{و} = \text{م} \text{ا} \text{ص} \text{س}$  (ا)  $\text{و} = \frac{1}{2} \text{ا} \text{س} \text{ص}$

(۶)  $\therefore \text{م} \text{ص} \text{ینصف} \text{ا} \text{ص} \text{س}$  (ا)  $\therefore \text{و} = \text{م} \text{ا} \text{ص} \text{س}$  (ا)  $\text{و} = \frac{1}{2} \text{ا} \text{ص} \text{س}$

**من (۴)، (۵)، (۶) نتیجہ ان:**  $\text{و} < \text{م} \text{ا} \text{ص} \text{س}$  (ا)  $\text{و} < \text{م} \text{ا} \text{س} \text{ص}$

$\therefore \text{م} \text{س} < \text{م} \text{ص}$

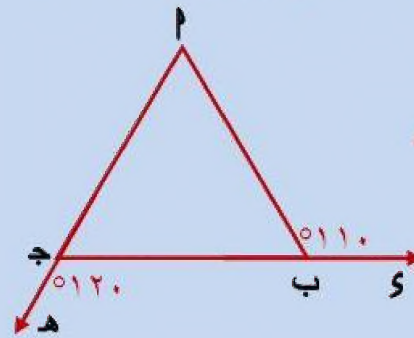


## اجب بنفسك

(١) في الشكل المقابل :

 $\angle ب ج م$  مثلث ،  $\angle ج ب ه$  ،  $\angle م ج ه$  $\angle م ب س = ١١٠^\circ$  ،  $\angle م ج ه = ١٢٠^\circ$  ،

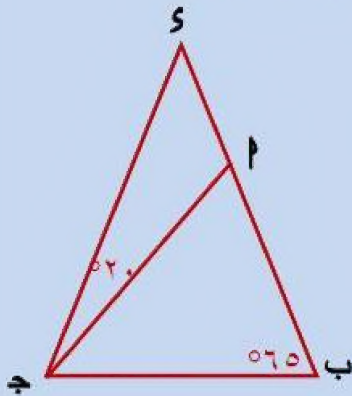
برهن أن :

 $\angle م < \angle ب ج$ 

(٢) في الشكل المقابل :

 $\angle ب ج م = ١٠٠^\circ$  ،  $\angle م ب س = ١٢٠^\circ$  ، $\angle م ج ه = ٢٠^\circ$  ،  $\angle م ب س = ١٢٠^\circ$  ،

برهن أن :

 $\angle م < \angle ب س$ 

مع أرق الأمنيات بالتفوق الباهر

أ/ محمد محمود

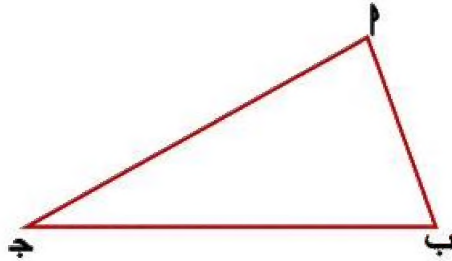
مدرس الرياضيات

## متباينة المثلث



في أي مثلث يكون مجموع طولي أي ضلعين أكبر من طول الضلع الثالث

أي أنه : في أي مثلث  $a, b, c$  يكون :



$$a + b > c$$

$$a + c > b$$

$$b + c > a$$

طول أي ضلع في المثلث أكبر من الفرق بين طولي الضلعين الآخرين وأقل من مجموعهما

نتيجة

في أي مثلث يكون :

$$a + b > c$$

$$a + c > b$$

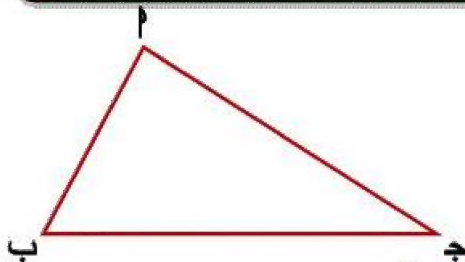
$$b + c > a$$

من (١) ، (٢) ينتج أن :

$$a + b > c > a - b$$

(١) متباينة المثلث

(٢) متباينة المثلث



لتحديد ما إذا كان أي ثلاثة أعداد تصلح أن تكون أطوالاً لأضلاع مثلث أم لا :

نجمع أصغر عددين منهما ونقارن المجموع بالعدد الثالث فإذا كان المجموع أصغر من أو يساوي العدد الثالث فإن هذه الأعداد لا تصلح أن تكون أطوالاً لمثلث ، وإذا كان المجموع أكبر من العدد الثالث فإن هذه الأعداد تصلح أن تكون أطوالاً لأضلاع مثلث .

مثال (١) :- بين أي من الأطوال الآتية تصلح أن تكون أضلاع مثلث :

١ ٢ سم ، ٣ سم ، ٥ سم

٢ ٣ سم ، ٧ سم ، ٥ سم

٣ ٤ سم ، ١١ سم ، ٦ سم

٤ ١٤ سم ، ٩ سم ، ٧ سم

لا تصلح ولا يمكن رسم المثلث

تصلح ويمكن رسم المثلث

لا تصلح ولا يمكن رسم المثلث

تصلح ويمكن رسم المثلث

١ ٥ = ٥ = ٣ + ٢

٢ ٧ < ٨ = ٥ + ٣

٣ ١١ > ١٠ = ٦ + ٤

٤ ١٤ < ١٦ = ٧ + ٩

الحل



## مثال (٢) :-

**أوجد الفترة التي ينتمي إليها طول الضلع الثالث في المثلث إذا كان طولا الضلعين الآخرين هما :**

(١) ٥ سم ، ٧ سم (٢) ٣,٢ سم ، ١,٤ سم (٣) ٥√٢ سم ، ٥√٢ سم

(١) طول الضلع الثالث  $\in ]٥ - ٧, ٥ + ٧[$   $\therefore$  طول الضلع الثالث  $\in ]٢, ١٢[$

(٢) طول الضلع الثالث  $\in ]١,٤ - ٣,٢, ١,٤ + ٣,٢[$   $\therefore$  طول الضلع الثالث  $\in ]١,٨, ٤,٦[$

(٣) طول الضلع الثالث  $\in ]٥√٢ - ٥√٢, ٥√٢ + ٥√٢[$

$\therefore$  طول الضلع الثالث  $\in ]٥√٤, صفر[$

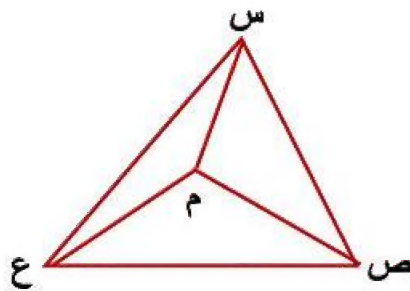
**طول أي ضلع في المثلث ينتمي إلى الفترة المفتوحة التي أطرافها :**

**[ الفرق بين طولي الضلعين الآخرين ، مجموع طولي الضلعين الآخرين ]**

## مثال (٣) :- في الشكل المقابل :

إذا كان محيط : س ص ع = ٥٠ سم

إثبت أن : س م + م ص + م ع < ٢٥



## الحل

$\therefore \Delta$  س م ص فيه س م + م ص < س ع

$\therefore \Delta$  م ص ع فيه ص م + م ع < ص ع

$\therefore \Delta$  س م ع فيه س م + م ع < س ع **بالجمع**

$\therefore$  س م + م ص + ص م + م ع + س م + م ع + ص م + م ع < س ع + ص ع + س ع

٢ س م + ٢ م ص + ٢ ص م + ٢ م ع < ٥٠  $\div ٢$

$\therefore$  س م + م ص + ص م + م ع < ٢٥

## اجب بنفسك

(١) هل يمكن رسم مثلث أطوال أضلاعه كما يلي :

① ٥ سم ، ٧ سم ، ٨ سم

② ١٠ سم ، ٦ سم ، ٤ سم

(٢) أوجد الفترة التي ينتمي إليها طول الضلع الثالث لكل من المثلثات الآتية إذا كان طولا الضلعين الآخرين :

① ٦ سم ، ٥ سم

② ٢,٩ سم ، ٣,٢ سم